

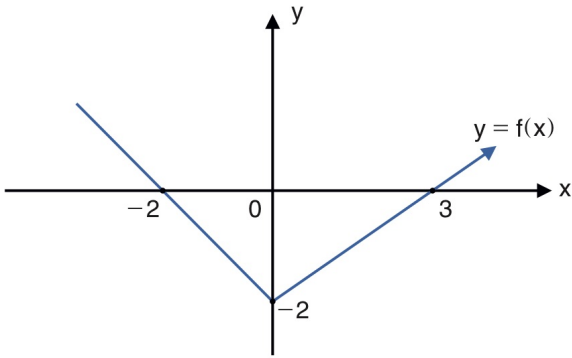


FONKSİYON ÖTELEMESİ

a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere;

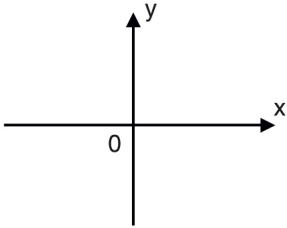
- $y = f(x)$ fonksiyonu;
- a birim yukarı ötelendiğinde
- a birim aşağı ötelendiğinde
- a birim sağa ötelendiğinde
- a birim sola ötelendiğinde

Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

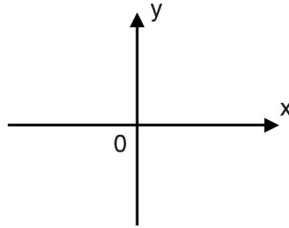


$f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre, aşağıda verilen ötelenmiş fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

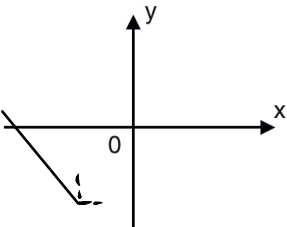
a) $f(x) + 2$



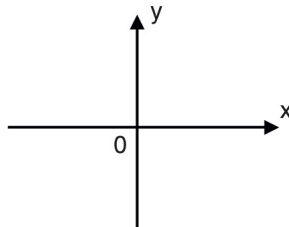
b) $f(x) - 1$



c) $f(x + 1) + 2$



d) $f(x - 2) - 1$

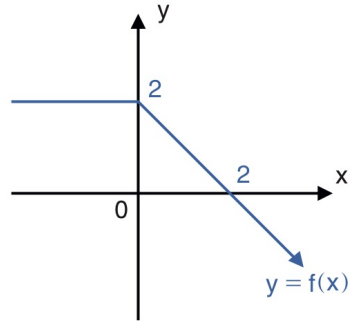


FONKSİYONLARDA DÖNÜŞÜM

Yansıma Dönüşümü

Uygun koşullarda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonun

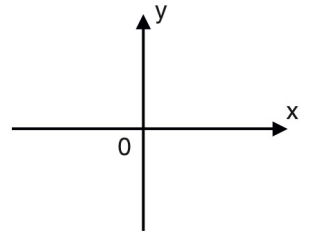
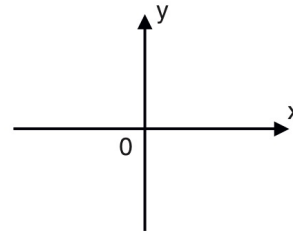
- x eksenine göre yansıması
- y eksenine göre yansıması
- Orijine göre yansıması



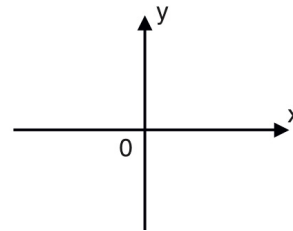
Yanda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre, aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

• $-f(x)$

• $f(-x)$



• $-f(-x)$



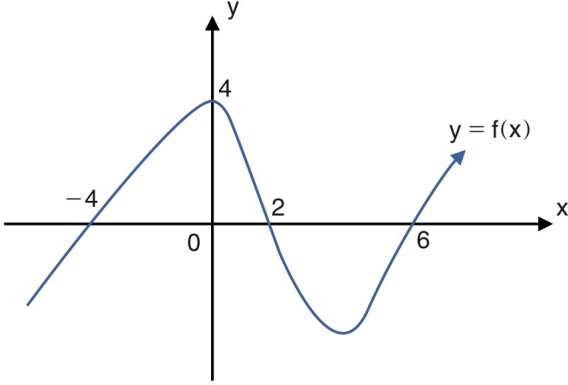


$k \cdot f(x)$ ve $f(kx)$ Dönüşümleri

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonunun

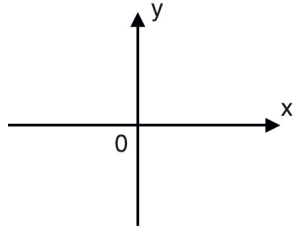
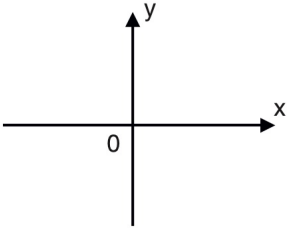
- Tanım kümesindeki elemanlar k ile çarpılırsa
- Görüntü kümesindeki elemanlar k ile çarpılırsa

fonksiyonları elde edilir.

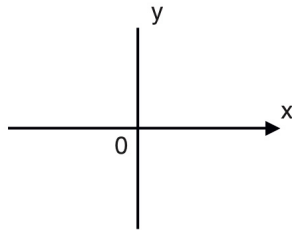
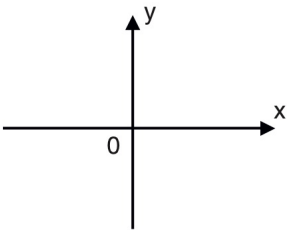


Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre, aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- $2 \cdot f(x)$
- $f(2x)$



- $\frac{1}{2} \cdot f(x)$
- $f\left(\frac{x}{2}\right)$



İsmail öğretmen öğrencisi Meriç'ten $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonuna sırasıyla aşağıda verilen işlemleri uygulamasını istiyor.

- 2 birim yukarı öteleme
- x eksenine göre yansıma
- y eksenine göre yansıma
- 1 birim sağa öteleme

Meriç, öğretmenin istediği tüm işlemleri eksiksiz ve doğru biçimde yapıyor ve $g(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunu elde ediyor.

Buna göre, $\frac{a+b}{c}$ kaçtır?



Not

$y = f(x)$ verildiğinde,

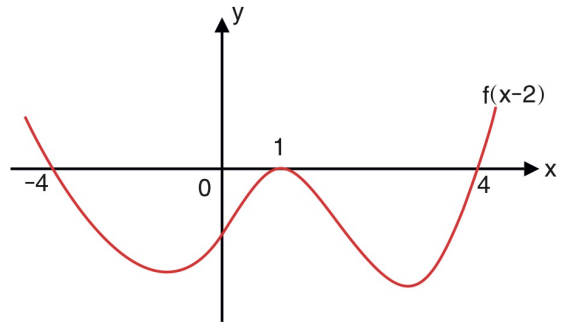
- $y = |f(x)|$ 'in grafiğini çizmek için,

.....

- $y = f(|x|)$ 'in grafiğini çizmek için,

.....

Aşağıda $y = f(x - 2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$y = 5 \cdot f(x+3)$$

fonksiyonunun birbirinden farklı sıfırlarının toplamı kaçtır?





İKİNCİ DERECEDE DENKLEMLER

a, b ve c reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şeklindeki denklemlere ikinci dereceden denklemler denir. Bu denklemi sağlayan x değerlerine denklemin kökleri denir. Bu köklerin bulunduğu kümeye ise denklemin çözüm kümesi denir.

İkinci dereceden bir denklemin çözüm kümesinin eleman sayısı 0, 1 ve en çok 2 olabilir. Bu farklı durumların sebebini konunun ilerleyen bölümlerinde "diskriminant" başlığı altında çok iyi anlayacaksınız.

İkinci dereceden denklemleri çözebilmek için bazı yöntemler mevcut. Şimdi bu yöntemleri inceleyip örneklerle anlamaya çalışalım...

ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMİ

Eğer denklemi oluşturan ikinci dereceden polinom, çarpanlara ayrılabilirse, bu yöntem en çok faydalanacağımız yöntem olacaktır.

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ denkleminde}$$

- **a = 1 ise;**

bu denklem $x^2 + bx + c = 0$ halini alacaktır. $x^2 + bx + c$ polinomunu çarpanlarına ayırmak için, toplamları b ve çarpımları c olan iki sayı bulacağız. Bu sayılara m ve n dersek,

$$m + n = b \text{ ve } m \cdot n = c \text{ olmalıdır.}$$

O halde $x^2 + bx + c = (x + m) \cdot (x + n)$ biçiminde çarpanlarına ayrılmış bir polinom elde ederiz.

$(x + m) \cdot (x + n) = 0$ ikinci dereceden denklemin köklerini bulmak için ise, çarpanlarına ayrılmış olan ifadenin her bir çarpanı sıfıra eşitlenir ve x değeri bulunur.

$$\underbrace{(x + m)}_{=0} \cdot \underbrace{(x + n)}_{=0} = 0 \quad \text{ise} \quad \begin{aligned} x + m = 0 &\Rightarrow x_1 = -m \\ x + n = 0 &\Rightarrow x_2 = -n \end{aligned}$$

$$\text{Çözüm Kümesi} = \mathcal{C} = \{-m, -n\}$$

- **a ≠ 1 ise;**

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde a ve c çarpanlara ayrılır.

$$\begin{array}{ccc} ax^2 + bx + c = 0 & & \begin{cases} a = p \cdot q \\ c = m \cdot n \end{cases} \\ \downarrow & & \downarrow \\ px & \xrightarrow{\quad} & m \\ qx & \xrightarrow{\quad} & n \end{array}$$

Eğer, $p \cdot n + q \cdot m = b$ eşitliği sağlanıyorsa,

$$ax^2 + bx + c = (px + m) \cdot (qx + n)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılmış bir polinom elde ederiz.

$(px + m) \cdot (qx + n) = 0$ ikinci dereceden denklemin köklerini bulmak için ise, çarpanlarına ayrılmış olan ifadenin her bir çarpanı sıfıra eşitlenir ve x değeri bulunur.

$$\underbrace{(px + m)}_{=0} \cdot \underbrace{(qx + n)}_{=0} = 0 \quad \text{ise} \quad \begin{aligned} px + m = 0 &\Rightarrow x_1 = -\frac{m}{p} \\ qx + n = 0 &\Rightarrow x_2 = -\frac{n}{q} \end{aligned}$$

$$\text{Çözüm Kümesi} = \mathcal{C} = \left\{ -\frac{m}{p}, -\frac{n}{q} \right\}$$

TAM KARE YÖNTEMİ

Bir ifadenin karesi olan ifadeler **tam kare ifadeler** denir.

$a + b$ ifadesinin karesi olan $a^2 + 2ab + b^2$ ifadesi bir tam kare ifadedir.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 - 10x + 25 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 + 40x + 400 = \dots\dots\dots$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \dots\dots\dots$$

$$x^2 + 11x + \frac{121}{4} = \dots\dots\dots$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \dots\dots\dots$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \dots\dots\dots$$





Bu yöntemi çarpanlara ayırmak için kullanabiliriz.

Çarpanlara ayırmakta güçlük çektiğimiz ifadeleri uygun formatta tam kare biçiminde yazıyoruz.

Gerisi çocuk oyuncağı ...

$$x^2 + 6x - 5 = 0 \text{ denklemini düşünelim,}$$

Bu denklemi önce tam kare bir ifadeye benzetelim. Aman dikkat! Bunu yaparken denklemi bozmayalım.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + 6x + 9 - 14 = 0 \\ \text{Tam kare ifade} \end{array} \right\} \text{ Şimdi tam kare ifadeyi yalnız bırakıyoruz.}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 14 \quad (x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2)$$

$$(x + 3)^2 = 14$$

$$\Rightarrow x + 3 = \sqrt{14} \quad \text{veya} \quad x + 3 = -\sqrt{14} \text{ olur.}$$

Buradan $x_1 = \sqrt{14} - 3$ ve $x_2 = -\sqrt{14} - 3$ elde edilir. O halde çözüm kümesi

$$\mathcal{C} = \{-\sqrt{14} - 3, \sqrt{14} - 3\} \text{ olacaktır.}$$

DİSKRİMİNANT HESABIYLA KÖK BULMA YÖNTEMİ

$a \neq 0$ ve a, b ve c reel sayılar olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ikinci dereceden denkleminin köklerini bulmanın bir diğer yolu diskriminanttan geçer. (Diskriminant(Delta) = Δ)

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ denkleminin diskriminantı}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ ile hesaplanır.}$$

Diskriminant (Delta) hesaplandıktan sonra kökler aşağıda verdiğim iki kural ile hesaplanır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

DİSKRİMİNANTA GÖRE DENKLEM YORUMU YAPMA

Diskriminantı hesapladığımızda karşımıza çıkan sonuç, bize ikinci dereceden denklemin çözüm kümesi hakkında yorum yapabileme imkanı sunar.

Bu konunun başında bahsettiğimiz çözüm kümesinin eleman sayısının alabileceği değerler hakkındaki cümleyi tekrar hatırla!

1) $\Delta > 0$ Olması Durumu

• $\Delta > 0$ ise, denklemin birbirinden farklı, iki reel kökü vardır.

• Denklemin çözüm kümesi iki elemanlıdır.

2) $\Delta = 0$ Olması Durumu

• $\Delta = 0$ ise, denklemin çakışık iki reel kökü vardır. (çakışık = birbirine eşit)

• Denklemin çözüm kümesi tek elemanlıdır.

3) $\Delta < 0$ Olması Durumu

• $\Delta < 0$ ise, denklemin reel kökü yoktur. Ancak yine her zaman olduğu gibi iki tane kökü vardır. Sadece bu kökler reel değildir. Karmaşık köklerdir.

İKİNCİ DERECEDEDEN DENKLEMLERİN KATSAYILARI İLE KÖKLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun,

- Kökler toplamı $x_1 + x_2 = \dots\dots\dots$
- Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 = \dots\dots\dots$
- Köklerin pozitif farkı $|x_1 - x_2| = \dots\dots\dots$



Not

$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

- $x_1 + x_2 = 0$
- $x_1 \cdot x_2 < 0$

sağlanıyorsa, bu denklemin kökleri **simetrik** denir.



Not

Rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemin köklerinden birisi $a \mp \sqrt{b}$ ise diğer kök $a \pm \sqrt{b}$ 'dir.





Sml Hoca, bir ders videosunda aşağıda verilen soruyu çözerken, her işlem basamağını adım adım ayırmış ve bu adımlardan birinde hata yapmıştır.

40
SORU SERİSİ
TYT ALTERNATİFİ
İŞLEM BECERİSİ

40. $x^2 - 6x + 1 = 0$
denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm:

1. Adım: $x^2 - 6x + 1 = 0$
2. Adım: $x^2 - 6x + 9 = -1 + 9$
3. Adım: $(x - 3)^2 = 8$
4. Adım: $x - 3 = 2\sqrt{2}$
5. Adım: $x = 3 + 2\sqrt{2}$

Buna göre, hatalı adımın numarası kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$$x^2 - (\Delta + 1)x + \left(2\Delta - \frac{11}{4}\right) = 0$$

denkleminin diskriminantı Δ 'dir.

Buna göre, denklemin reel köklerinin alabileceği birbirinden farklı değerlerin toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 12

a bir gerçel sayı olmak üzere,

$$(a + 4)x^2 + (1 - a)x + 9 + 2a = 0$$

denkleminin köklerinden biri a'dır.

Buna göre, denklemin diğer kökü kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

$$x^2 + (m - 2)x + 15 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi iki elemanlı,

$$x^2 + (n - 4)x + 24 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi boş küme olduğu biliniyor.

Buna göre, m'nin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri ile n'nin alabileceği en büyük tam sayı değerinin pozitif farkı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

k pozitif bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\frac{x^2 - kx}{k} = 4x$$

denkleminin kökleri a ve b'dir.

$$a^2 - b^2 = -50$$

olduğuna göre, k kaçtır?

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 3 E) $2\sqrt{2}$





İKİNCİ DERECEDEKİ EŞİTSİZLİKLER

Denklem versiyonunu çözerken ikinci dereceden ifademiz hep başka bir ifadeye "eşitti". Şimdi ise eşit olmama durumlarını ele alacağız.

< : Küçüktür ≤ : Küçük veya eşittir

> : Büyüktür ≥ : Büyük veya eşittir

$a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

biçiminde gösterilen eşit olmama durumlarına **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** diyeceğiz.

İŞARET TABLOSU

Verilen ikinci dereceden fonksiyonun hangi sayı aralığında pozitif / negatif / sıfır olduğunu temsilen gösteren tabloya işaret tablosu denir.

$f(x)$ ikinci dereceden bir fonksiyon olmak üzere, $f(x)$ 'in işaret tablosunu çizmek için aşağıdaki adımlar uygulanır:

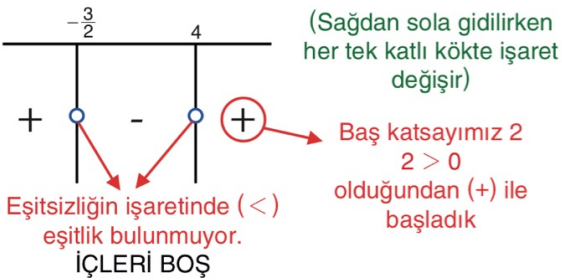
- 1) $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x 'ler bulunur ve sayı doğrusunda gösterilir. Köklerin varlığı / yokluğu denklemin diskriminantı yardımı ile elde edilir.
- 2) $f(x)$ 'in baş katsayısı (a) pozitiflik / negatiflik bakımından incelenir.
- 3) Tablo çizilir.

Örneğin;

$2x^2 - 5x - 12 < 0$ eşitsizliğinin işaret tablosunu oluşturalım.

2 adet kökümüz var ve bunlar

$$x_1 = -\frac{3}{2} \quad x_2 = 4$$



$\frac{P(x)}{Q(x)}$ BİÇİMİNDEKİ İFADELERLE EŞİTSİZLİK ÇÖZÜMLERİ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

şeklinde eşitsizlikler çözlürken,

- 1) $P(x) = 0$ ve $Q(x) = 0$ yapan kökler bulunup sayı doğrusunda sıralanır.
- 2) $Q(x) = 0$ yapan x değerleri, paydayı sıfır yapacağından çözüme dahil edilmez.

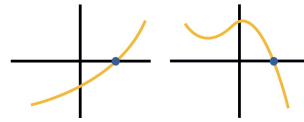
EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

Bazen bizden birden fazla eşitsizliği aynı anda çözmemiz istenir.

Nasıl ki birden fazla denklemin barındıran ifadelerle "denklemler sistemi" diyorduk, şimdi de birden fazla eşitsizliği barındıran ifadelerle "eşitsizlik sistemi" diyeceğiz.

GRAFİKLİ EŞİTSİZLİK SORULARI

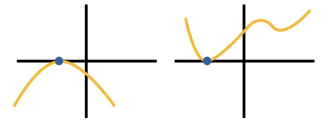
• Tek katlı kök



Başkatsayı
POZİTİF

Başkatsayı
NEGATİF

• Çift katlı kök



Başkatsayı
NEGATİF

Başkatsayı
POZİTİF





$a < b < 0 < c$ olmak üzere,

$$\frac{(x-a) \cdot (x-c)}{(b-x)^2} < 0$$

eşitsizliğin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (a, c) B) (a, b) C) (a, c) - {b}
D) $(-\infty, a) \cup (c, \infty)$ E) (b, c)

$$\frac{(4^x - 64) \cdot (x^2 - 3x - 18)}{x^2 + 6x + 20} < 0$$

eşitsizliğini sağlayan x doğal sayılarının toplamı kaçtır?

- A) 18 B) 15 C) 12 D) 9 E) 6

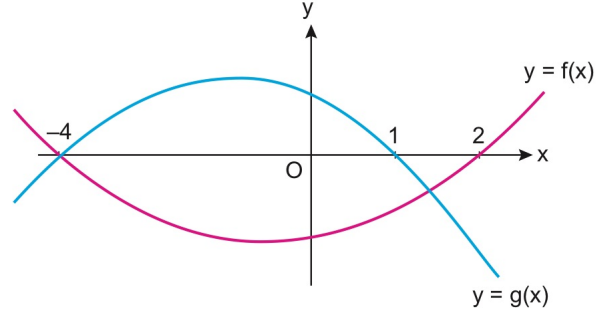
$$x^3 - 3x^2 + 2x \geq 0$$

$$x^2 - 1 < 0$$

eşitsizlik sisteminin en geniş çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (0, 1) B) [0, 1] C) [0, 1)
D) (-1, 1] E) (-1, 1)

Aşağıda $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



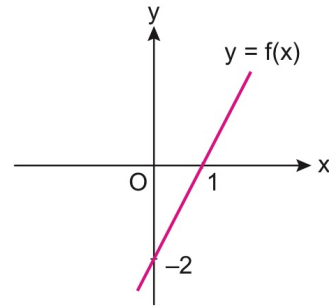
Buna göre,

$$\frac{(x^2 - 4x) \cdot f(x)}{g(x)} < 0$$

eşitsizliğini sağlamayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\frac{f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f(x-1)}{f^4(x+2)} \geq 0$$

eşitsizliğinin çözüm aralığında bulunmayan x tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

- A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3





1

$$f(x) = 3(x - a)^3$$

f(x) fonksiyonu veriliyor.

f(x) fonksiyonu 2 birim sola ve 4 birim aşağı ötelenğinde

$$h(x) = 3(x - 3)^2 - 4$$

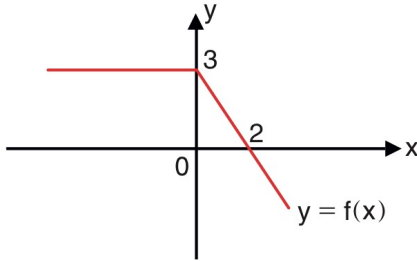
f(x) fonksiyonu elde ediliyor.

Buna göre, a kaçtır?

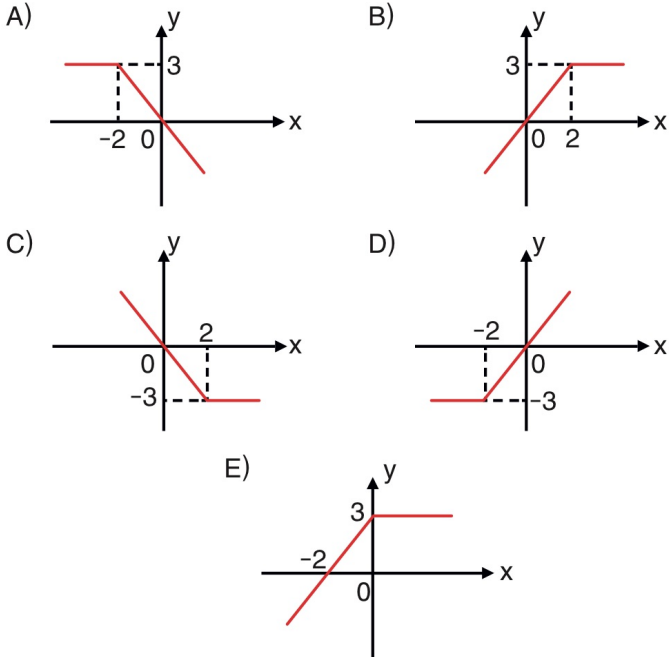
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2

Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, aşağıdakilerden hangisi $-f(x + 2)$ fonksiyonunun grafiğidir?



3

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x^2 - 9|$$

f(x) fonksiyonu veriliyor.

f fonksiyonu önce 3 birim aşağı öteleniyor. Sonra oluşan yeni fonksiyonun x-eksenine göre simetriği alınıyor ve bu şekilde h(x) fonksiyonu elde ediliyor.

Buna göre, $h(x) = 1$ denklemini sağlayan kaç tane x değeri vardır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

4

$$(x - k + 1)^2 = |k| - 7$$

denkleminin çözüm kümesi boş kümedir.

Buna göre, k kaç farklı tam sayı değerine eşit olabilir?

- A) 6 B) 7 C) 12 D) 13 E) 15

5

$$3^{x-1} + 3^{2x-1} = \frac{2}{3}$$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) {1} B) {-2, 1} C) {-2}
D) {0} E) {0, 1}





6

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

denkleminin kökleri a ve b'dir.

Buna göre,

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(b + \frac{1+b}{b}\right)^2$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

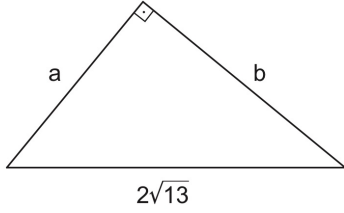
- A) 25 B) 16 C) 9 D) 7 E) 1

7

m bir gerçel sayı olmak üzere,

$$P(x) = x^2 - 10x + m$$

polinomu $(x - a)$ ve $(x - b)$ ile tam bölünüyor.



Yukarıda verilen dik üçgene göre, m sayısı kaçta eşittir?

- A) 24 B) 16 C) 14 D) 12 E) 8

8

$$x^2 - 3x - 8 = 0$$

denkleminin kökleri

$$x^2 + (m - 1) \cdot x + n = 0$$

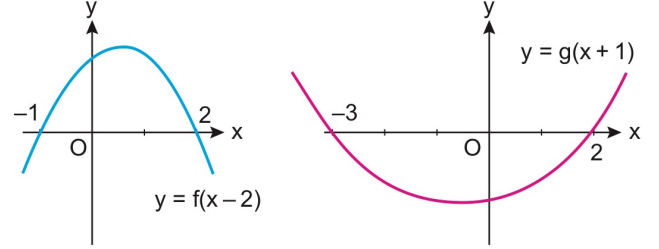
denkleminin köklerinden 2'ser eksiktir.

Buna göre, $\frac{m}{n}$ oranı kaçta eşittir?

- A) -1 B) $-\frac{3}{2}$ C) -2 D) $-\frac{5}{2}$ E) -3

9

Aşağıda $y = f(x - 2)$ ve $y = g(x + 1)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre,

$$x \cdot f(x) \cdot g(x) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan x doğal sayılarının toplamı kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

zeduva.com

10

Bir A kümesinden gerçel sayılara tanımlı bir f fonksiyonu,

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ için}$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlamaktadır.

$$f(2) = 2a^2 + 7a - 8$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = a^2 - 3a + 31$$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, a sayısının alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri için, $f\left(\frac{17}{8}\right)$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 24 B) 29 C) 38 D) 54 E) 62

